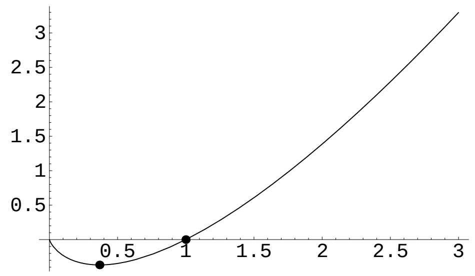
Lösungen zur Übungsserie: Kurvendiskussion

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für folgende Funktionen durch:

1. $\boxed{y = x \ln x}$

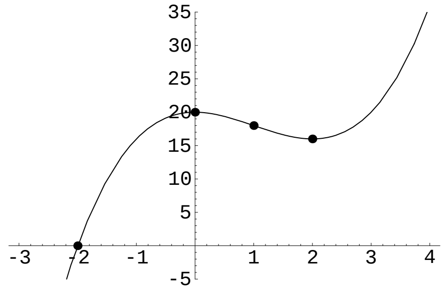
   - Definitionsbereich: $x \in R$ mit: $x > 0$
   - Nullstellen: $x_0 = 1$
   - Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches:
     $$\lim_{x \to +0} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +0} -\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} (-x) = -0$$
     (Regel von L'Hospital)
     $$\lim_{x \to +\infty} x \ln x = \infty$$
   - Extremwerte:
     notwendige Bedingung $y'(x_E) = 0: \quad y' = \ln x \; + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = \frac{1}{e}$
     hinreichende Bedingung $y''(x_E) \neq 0: \quad y'' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y''(\frac{1}{e}) = e > 0 \quad \Rightarrow$ rel. Minimum $P_{min}(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$
   - Wendepunkte:
     notwendige Bedingung $y''(x_W) = 0: \quad y'' = \frac{1}{x} \neq 0$ für alle $x \Rightarrow$ kein Wendepunkt.
   - Wertebereich: $-\frac{1}{e} \leq y < \infty)$
   - Skizze:



2. $\boxed{y = x^3 - 3x^2 + 20}$

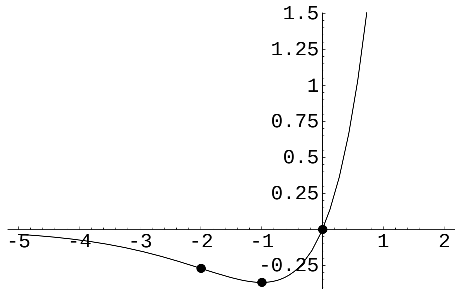
   - Definitionsbereich: $x \in R$
   - Nullstellen: $x_1 = -2$
     Polynomdivision: $y = (x+2)(x^2 - 5x + 10) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 10} \quad \Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen
   - Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches:
     $$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$$
     $$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$
   - Extremwerte:
     notwendige Bedingung $y'(x_E) = 0: \quad y' = 3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0, \; x_{E2} = 2$
     hinreichende Bedingung $y''(x_E) \neq 0:$
     $y'' = 6x - 6 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow$ rel. Maximum $P_{max}(0, 20)$
     $y'' = 6x - 6 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = \;\; 6 > 0 \quad \Rightarrow$ rel. Minimum $P_{min}(0, 16)$
   - Wendepunkte:
     notwendige Bedingung $y''(x_W) = 0: \quad y'' = 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_W = 1$
     hinreichende Bedingung $y'''(x_W) \neq 0: \quad y''' = 6 \neq 0$ für alle $x \quad \Rightarrow \quad P_W(1, 18)$

- Wertebereich: $y \in R$
- Skizze:



3. $\boxed{y = xe^x}$

- Definitionsbereich: $x \in R$
- Nullstellen: $x_0 = 0$
- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches:
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = -\infty \cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = -\frac{1}{\infty} = -0$$
(Regel von L´Hospital)
$$\lim_{x\to+\infty} xe^x = \infty$$
- Extremwerte:
notwendige Bedingung $y'(x_E) = 0$: $y' = (1+x)e^x = 0 \Rightarrow x_E = -1$
hinreichende Bedingung $y''(x_E) \neq 0$:
$y'' = (2+x)e^x \Rightarrow y''(-1) = e > 0 \Rightarrow$ rel. Minimum $P_{min}(-1, -\frac{1}{e})$
- Wendepunkte:
notwendige Bedingung $y''(x_W) = 0$: $y'' = (2+x)e^x = 0 \Rightarrow x_W = -2$
hinreichende Bedingung $y'''(x_W) \neq 0$: $y''' = (3+x)e^x \Rightarrow y'''(2) \neq 0 \Rightarrow P_W(-2, -\frac{2}{e^2})$
- Wertebereich: $-\frac{1}{e} \leq y < \infty$
- Skizze:

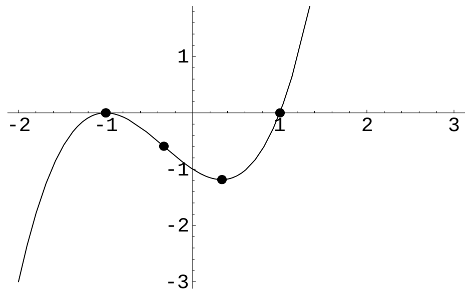


4. $\boxed{y = (x-1)(x+1)^2}$

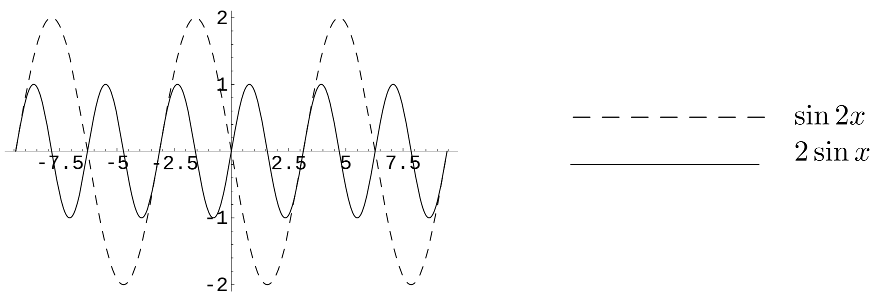
$$y = x^3 + x^2 - x - 1$$
$$y' = 3x^2 + 2x - 1$$
$$y'' = 6x + 2$$
$$y''' = 6$$

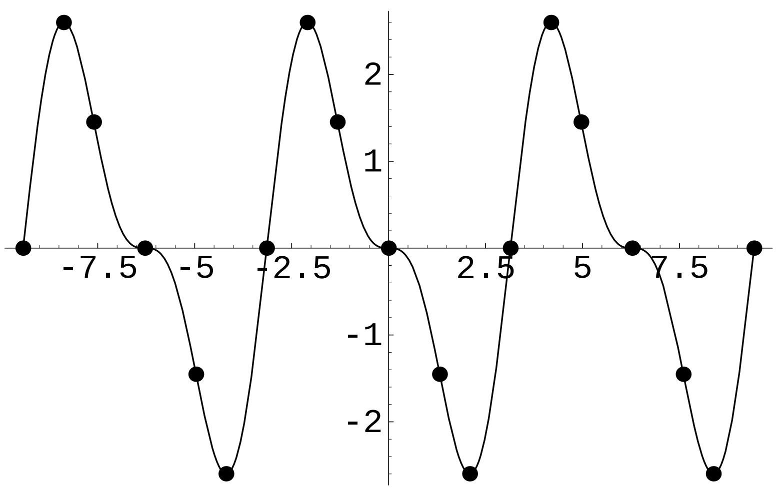
- Definitionsbereich: $x \in R$
- Nullstellen: $x_1 = 1$ (einfach) $x_{2,3} = -1$ (doppelt)

- Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches:
  $$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$
  $$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$
- Extremwerte:
  notwendige Bedingung $y'(x_E) = 0$: $x_{E1} = -1,\ x_{E2} = \frac{1}{3}$
  hinreichende Bedingung $y''(x_E) \neq 0$:
  $y''(-1) = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ rel. Maximum $P_{max}(-1, 0)$
  $y''(\frac{1}{3}) = 4 > 0 \quad \Rightarrow$ rel. Minimum $P_{min}(0.333, -1.185)$
- Wendepunkte:
  notwendige Bedingung $y''(x_W) = 0$: $x_W = -\frac{1}{3}$
  hinreichende Bedingung $y'''(x_W) \neq 0$: $y''' = 6 \neq 0$ für alle $x \quad \Rightarrow \quad P_W(-0.333, -0.593)$
- Wertebereich: $y \in R$
- Skizze:



5. $\boxed{y = \sin 2x - 2\sin x} = 2\sin x\cos x - 2\sin x = 2\sin x(\cos x - 1)$





$y = \sin 2x - 2\sin x$

Bestimmung von Nullstennen, relativer Extremwerte und Wendepunkte:

Argumente x	Funktionswerte y	1.Ableitung y'	2.Ableitung y''	3.Ableitung y'''
	$2\sin x(\cos x - 1)$	$4\cos^2 x - 2\cos x - 2$	$2\sin x(1 - 4\cos x)$	$-16\cos^2 x + 2\cos x + 8$

Nullstellen: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 1.Fall: $\sin x = 0$, 2.Fall $\cos x = 1$

$x_1 = k\pi$	0			
$x_2 = 2k\pi$	0			

Extremwerte: $y' = 0,\ y'' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$ 1.Fall: $\cos x = -\frac{1}{2}$, 2.Fall: $\cos x = 1$

$x_1 = k\pi$	0	0	0	$-6 \Rightarrow$ Wendepunkt
$x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	0	$3\sqrt{3} > 0$	$\Rightarrow$ rel.Minimum
$x_3 = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	0	$-3\sqrt{3} < 0$	$\Rightarrow$ rel.Maximum

Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ 1.Fall: $\sin x = 0$, 2.Fall: $\cos x = \frac{1}{4}$

$x_1 = k\pi$	0		0	$\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
$x_2 = 1.318 + 2k\pi$	-1.452		0	$\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt
$x_3 = -1.318 + 2k\pi$	1.452		0	$\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Definitionsbereich: $x \in R$
Wertebereich: $y \in R$ mit $-\frac{3}{2}\sqrt{3} \leq y \leq \frac{3}{3}\sqrt{3}$

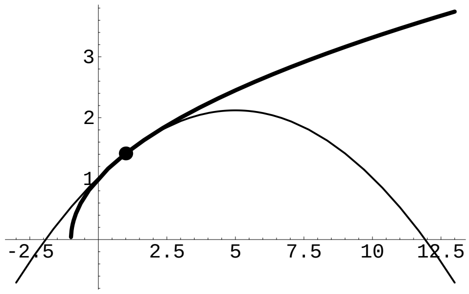
Lösungen zur Übungsserie: Näherungsrechnung

1. (a) Nähern Sie folgende Funktion in der Umgebung von x_0 durch ein Polynom 2. Grades (Skizze) $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 1$

Taylorentwicklung 2.Ordnung: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2$

$$\begin{array}{ll} y = \sqrt{1+x} & y(1) = \sqrt{2} \\ y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} & y'(1) = \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ y'' = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}} & y''(1) = -\frac{1}{16}\sqrt{2} \end{array}$$

$$y = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{32}(x-1)^2\right) = -\frac{1}{32}\sqrt{2}\left(x^2 - 10x - 23\right)) = -\frac{\sqrt{2}}{32}(x-5)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



(b) Mit welchem Fehler muß man rechnen, wenn man nicht weiter als 0.5 vom Entwicklungspunkt x_0 entfernt ist?

Fehlerabschätzung: $R_n = \left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}\right|$ $\quad \xi$ zwischen x und x_0

Wähle für ξ und x ungünstigsten Werte aus dem gegebenen Intervall $[0.5, 1.5]$, um den Fehler nach oben abzuschätzen.
Hier: $\xi = 0.5, \; x = 1.5$ (oder 0.5) $\quad \Rightarrow \quad R_2 = \left|\frac{1}{8\sqrt{(1+\xi)^5}}(x-1)^3\right| \leq 0.00283$

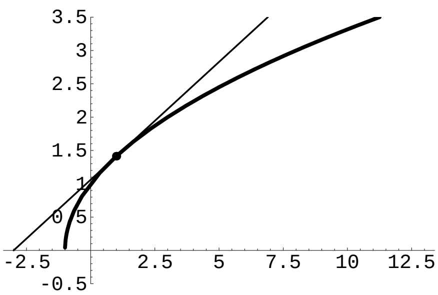
(c) Wie weit müßte man diese Funktion entwickeln, um einen Fehler von 0.03 nicht zu überschreiten?

Taylorentwicklung 1.Ordnung: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}(x-1)\right)$

Fehlerabschätzung:

$$R_1 = \left|-\frac{1}{8\sqrt{(1+\xi)^3}}(x - x_0)^2\right|$$

Dieser Ausdruck ist wiederum am größten, wenn $\xi = 0.5$ und $x = 1.5$ oder 0.5 ist.
$R_1 = 0.017 \; < \; 0.03 \quad \Rightarrow \quad$ Taylorentwicklung 1.Ordnung (Tangente) reicht schon aus.



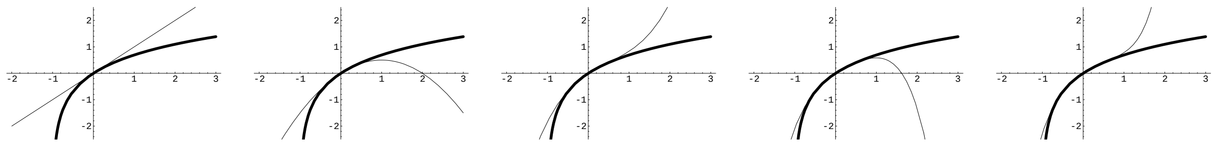
2. Entwickeln Sie die Funktion $y = \ln(1+x)$ in $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe.

$$\begin{array}{ll}
y = \ln(1+x) & y(0) = 0 \\
y' = \frac{1}{1+x} & y'(0) = 1 \\
y'' = -\frac{1}{(1+x)^2} & y''(0) = -1 \\
y''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} & y'''(0) = 2 \\
y^{(4)} = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} & y^{(4)} = -6 \\
\vdots & \vdots \\
y^{(k)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k} & y^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!
\end{array}$$

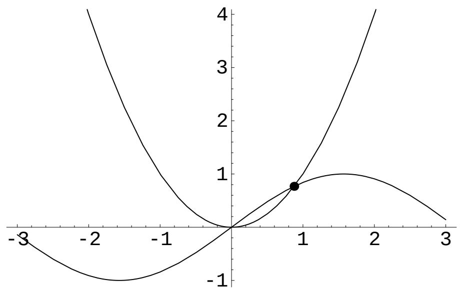
Taylorentwicklung n-ter Ordnung:

$$y = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$
$$y = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + - \cdots$$

$n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad$ $n=3$ $\quad$ $n=4$ $\quad$ $n=5$



3. Lösen Sie mit dem Newtonverfahren näherungsweise die Gleichung $\sin x = x^2$. Wählen Sie dabei (für die Lösung $x \neq 0$) einen geeigneten Startwert, indem Sie den Schnittpunkt von $y = \sin x$ und $y = x^2$ aus einer Skizze ablesen.



Startwert $x_0 = 1$
Newtonverfahren zur Lösung von $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

n	x_n	$f(x) = \sin x_n - x_n^2$	$f'(x) = -\cos x_n + 2x_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1.00000	-0.15853	-1.45970	0.108604
1	0.89140	-0.01664	-1.15447	0.014411
2	0.87699	-0.00029	-1.11450	0.000259
3	0.87673	$-9.2\ 10^{-8}$	-1.11378	$8.3\ 10^{-8}$

Lösung: $x = 0.87673$