Übungsserie: **Vektorrechnung**

1. Bestimmen Sie grafisch und trigonometrisch Richtung und Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ mit $|F_1| = F_1 = 700N \quad F_2 = 600N$ und $\angle(\vec{F_1}, \vec{F_2}) = 110^o$

2. Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung:
In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.

3. A, B, C seien drei Punkte des Raumes. Sie sollen nicht auf einer Geraden liegen. Man betrachte diese Punkte als Eckpunkte eines Dreiecks und bestimme die Vektoren, die parallel zu folgenden sind:
   (a) Seitenhalbierende von $\vec{AB}$
   (b) Winkelhalbierende des Winkels von A
   (c) Höhe auf $\vec{BC}$
   (d) Mittelsenkrechte von $\vec{CA}$

4. Beweisen Sie $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

5. Welche der folgenden Aussagen sind definiert? Stellen die definierten Ausdrücke einen Vektor oder ein Skalar dar?

a)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$	b)	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$	c)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$	d)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d})$
e)	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{c}$	f)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$	g)	$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$		

6. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein ?
   (a) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
   (b) $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3, \qquad \vec{b} = \vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$

7. Welche Vektoren $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ erfüllen die Bedingungen
$|\vec{a}| = 20, \angle(\vec{e}_1, \vec{a}) = \angle(\vec{e}_2, \vec{a}) = \pi/3$?

8. Zwei Vektoren $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ und $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ sind durch ihre Beträge $|\vec{a}| = 15, |\vec{b}| = 10$ und je zwei Richtungskosinus $\cos(\vec{e}_1, \vec{a}) = 0.6$ und $\cos(\vec{e}_2, \vec{a}) = 0.8$ bzw. $\cos(\vec{e}_1, \vec{b}) = 0.4$ und $\cos(\vec{e}_2, \vec{b}) = 0.6$ gegeben. Man berechne
   (a) Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$
   (b) die Richtungswinkel
   (c) Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$
   (d) Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$
   (e) Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

9. Man bestimme zwei Zahlen α und β so, daß der Vektor
$\vec{a} = \vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$ auf den Vektoren
$\vec{b} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ und $\vec{c} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
senkrecht steht.

10. Gegeben sind drei Punkte im Raum:
$A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$ und $C(-2,3,-1)$
   (a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$!
   (b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

11. (a) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\begin{array}{rcrcrcr} \vec{v}_1 & = & 4\vec{e}_1 & + & 4\vec{e}_2 & - & 2\vec{e}_3 \\ \vec{v}_2 & = & 4\vec{e}_1 & - & 2\vec{e}_2 & + & 4\vec{e}_3 \\ \vec{v}_3 & = & -2\vec{e}_1 & + & 4\vec{e}_2 & + & 4\vec{e}_3 \end{array}$$

   nicht in einer Ebene liegen (linear unabhängig sind)!
   (b) Stellen Sie den Vektor $\vec{a} = 8\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$ als Linearkombination der $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dar!

12. Sind die Vektoren
$\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ $\quad\vec{b} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ $\quad\vec{c} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$
komplanar?
Bestimmen Sie drei Zahlen λ, μ, ν mit $\vec{o} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

13. Man bestimme λ so, daß die drei Vektoren
$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\quad\vec{b} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\quad\vec{c} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$
komplanar sind.