

Übungsserie: Analytische Geometrie

- Man gebe die Gleichung einer Geraden g des dreidimensionalen Raumes in Parameterdarstellung an, die die nachfolgenden Forderungen erfüllt.

- g ist die x-Achse
- g ist die z-Achse
- g verläuft parallel zur y-Achse und geht durch den Punkt $P(1, 2, 3)$
- g ist parallel zu dem Vektor $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ und geht durch den Punkt $Q(1, 0, 1)$
- g geht durch den Schnittpunkt S der Geraden
 $(x, y, z) = (5, -2, 1) + t(-1, 7, 4), t \in \mathbb{R}$, mit der y,z-Ebene und verläuft parallel zur z-Achse.

$$(\text{Lösung: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 21 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R})$$

- Welchen Winkel φ bildet die Schnittgerade g der Ebenen $E_1 : 2x + y = z$ und $E_2 : x + y + 2z = 0$ mit der x-Achse? (Lösung: $\varphi = 59.53^\circ$)
- Gegeben seien die Ebene $E : x - 2y + 2z = -1$ und die durch die Punkte $P_1(1, 0, 0)$ und $P_2(0, -1, -1)$ aufgespannte Gerade g_1 .

- Man bestimme diejenige Gerade g_2 , die in E liegt und g_1 senkrecht schneidet.

$$(\text{Lösung: } g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R})$$

- Welche Punkte P_3 und P_4 auf der Geraden g_1 haben von E den Abstand 1 ?

$$(\text{Lösung: } P_3(2, 1, 1), \quad P_4 = (-4, -5, -5))$$

- Man bestimme die Länge d der (orthogonalen) Projektion der Verbindungsstrecke der Punkte P_1, P_2 auf einen Normalvektor von E .

$$(\text{Lösung: } \vec{d} = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad d = |\vec{d}| = \frac{1}{3})$$

- Im Punkt $Q(5, 7, 10)$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle. Man bestimme den Flächeninhalt A des Schattens, der von dem Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(7, 8, 13), P_2(6, 10, 14)$ und $P_3(4, 10, 13)$ auf der Ebene $E : 2x + 3y - 2z = 14$ erzeugt wird.

$$(\text{Lösung: Fläche} = 30.92 \text{ FE})$$

- An einem Knotenpunkt von drei Seilen wirkt eine Kraft von 10 kN in Richtung $-\vec{e}_3$. Die Richtungen der Seile sind durch folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = (-15, 0, 1), \quad \vec{b} = (0, -10, 1), \quad \vec{c} = (5, 10, 2).$$

Welchen Belastungen sind die einzelnen Seile ausgesetzt?

$$(\text{Lösung: } F_a = 15.03 \text{ kN}, \quad F_b = 30.15 \text{ kN}, \quad F_c = 34.07 \text{ kN})$$