Übungsserie: Analytische Geometrie

1. Man gebe jeweils die Gleichung einer Geraden g des dreidimensionalen Raumes in Parameterdarstellung an, die die nachfolgenden Forderungen erfüllt.

   (a) g ist die x-Achse
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

   (b) g ist die z-Achse
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

   (c) g verläuft parallel zur y-Achse und geht durch den Punkt $P(1,2,3)$
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

   (d) g ist parallel zu dem Vektor $\vec{a} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 2\vec{e_3}$ und geht durch den Punkt $Q(1,0,1)$
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

   (e) g geht durch den Schnittpunkt S der Geraden $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in R$ mit der y,z-Ebene und verläuft parallel zur z-Achse.
   Gleichung der y,z-Ebene: $x = 0$
   Schnittpunkt mit der Geraden: $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad t = 5 \quad \Rightarrow \quad S \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 21 \end{pmatrix}$
   $$g: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 33 \\ 21 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in R$$

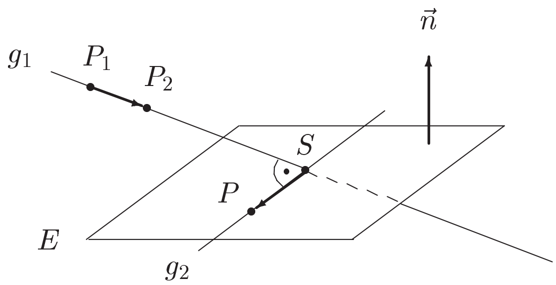
2. Welchen Winkel φ bildet die Schnittgerade g der Ebenen $E_1 : 2x + y = z$ und $E_2 : x + y + 2z = 0$ mit der x-Achse?
   Schnittgerade aus Lösung eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten:
   $$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$
   Eine Variable ist frei wählbar: z.B. $z = t \in R$ beliebig
   Eingesetzt in das Gleichungssystem und aufgelöst nach x und y erhält man: $x = 3t$ und $y = -5t$.
   Als Schnittgerade ergibt sich demnach:
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

Den Winkel mit der x-Achse berechnet man aus dem Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden mit dem Einheitsvektor in x-Richtung:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3}{\sqrt{35}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 59.53^o$$

3. Gegeben seien die Ebene $E : x - 2y + 2z = -1$ und die durch die Punkte $P_1(1,0,0)$ und $P_2(0,-1,-1)$ aufgespannte Gerade g_1.

   (a) Man bestimme diejenige Gerade g_2, die in E liegt und g_1 senkrecht schneidet.



Bestimmung des Schnittpunktes S mit E:

$$g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ in } E \text{ einsetzen:}$$

$$(1-t) - 2(-t) + 2(-t) = -1 \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad S \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bedingungen:
1: $P \in E$, d.h. $x - 2y + 2z = -1$
2: $\vec{SP}$ senkrecht auf $\vec{n}$, d.h. Skalarprodukt $= 0 = -(x+1) - (y+2) - (z+2)$

Lineares Gleichungssystem:
1: $x - 2y + 2z = -1$
2: $x + y + z = -5$

$$\text{Lösung = Gerade } g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ s \in R$$

Andere Möglichkeit:

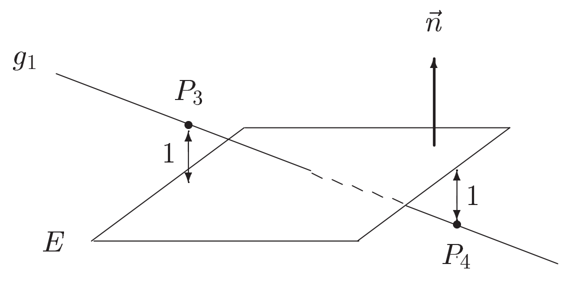
Zur Charakterisierung einer Geraden braucht man einen Punkt und eine Richtung, d.h.

einen Vektor.
Den Punkt beschafft man sich wie oben als Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der Ebene E. Den Vektor erhält man aus dem Vektorprodukt aus dem Richtungsvektor von g_1 mit dem Normalenvektor der Ebene E, da dieser auf beiden Vektoren senkrecht steht, also die gewünschete Richtung hat.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in R$$

(b) Welche Punkte P_3 und P_4 auf der Geraden g_1 haben von E den Abstand 1 ?



Abstand eines Punktes von der Ebene: Punkt in Hessesche Normalform der Ebene einsetzen.

Hessesche Normalform: $x - 2y + 2z + 1 = 0 \mid : |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}$

$$\tfrac{1}{3}\,(x - 2y + 2z + 1) = 0$$

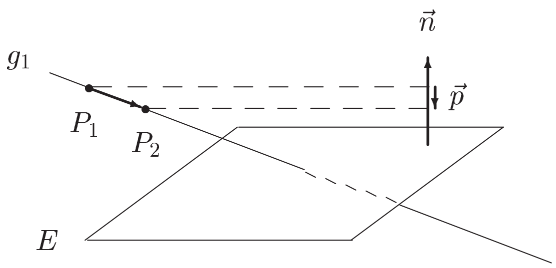
Einsetzen eines Punktes der Geraden g_1 in diese Gleichung = Abstand = 1

$$\begin{aligned} \left| \tfrac{1}{3}\,((1-t) - 2(-t) + 2(-t) + 1) \right| &= 1 \\ ((1-t) - 2(-t) + 2(-t) + 1) &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_3 &= -1 && \Rightarrow \ P_3(2, 1, 1) \\ t_4 &= -5 && \Rightarrow \ P_4(-4, -5, -5) \end{aligned}$$

(c) Man bestimme die Länge d der (orthogonalen) Projektion der Verbindungsstrecke der Punkte P_1, P_2 auf einen Normalvektor von E.

orthogonale Projektion von $\vec{P_1P_2}$ auf $\vec{n} \quad = \vec{p}$

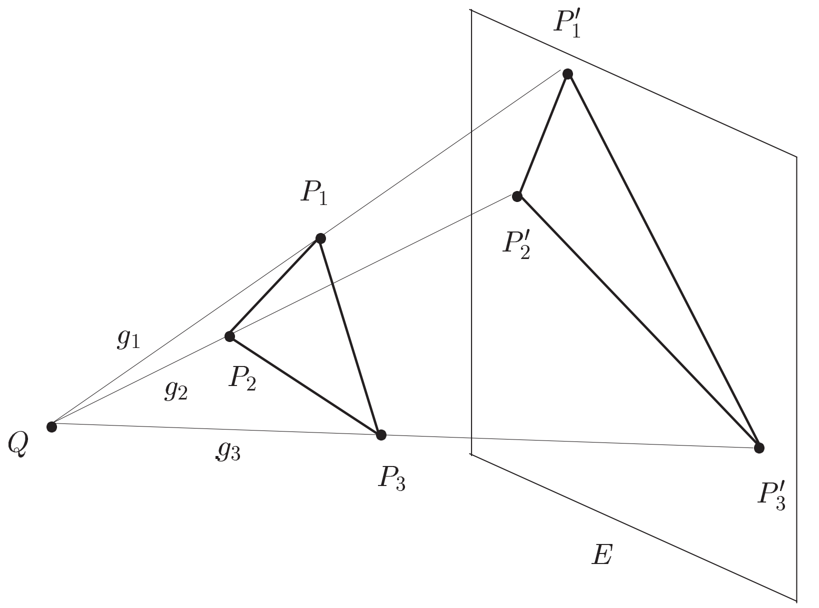


$$\vec{p} = \frac{\vec{P_1P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{p} = -\tfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{p}| = \tfrac{1}{3}$$

4. Im Punkt $Q(5,7,10)$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle. Man bestimme den Flächeninhalt A des Schattens, der von dem Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(7,8,13), P_2(6,10,14)$ und $P_3(4,10,13)$ auf der Ebene $E: 2x+3y-2z=14$ erzeugt wird.



Bestimmung der Punkte $P_1',\ P_2',\ P_3'$ als Schnittpunkte der Geraden $g_1,\ g_2,\ g_3$ mit der Ebene E:

$$\begin{aligned} g1: &\ \vec{OP} = \vec{OQ} + t\ \vec{QP_1} \\ g2: &\ \vec{OP} = \vec{OQ} + t\ \vec{QP_2} \\ g3: &\ \vec{OP} = \vec{OQ} + t\ \vec{QP_3} \end{aligned}$$

einsetzen in $E:\ 2x+3y-2z=14$

$$\begin{aligned} 2(5+2t)+3(7+t)-2(10+3t) &= 14 \quad \Rightarrow \quad t=3 \quad \Rightarrow \quad P_1'(11,10,19) \\ 2(5+t)+3(7+3t)-2(10+4t) &= 14 \quad \Rightarrow \quad t=1 \quad \Rightarrow \quad P_2'(6,10,14) \\ 2(5-t)+3(7+3t)-2(10+3t) &= 14 \quad \Rightarrow \quad t=3 \quad \Rightarrow \quad P_3'(2,16,19) \end{aligned}$$

Flächeninhalt des Schattendreiecks$= \frac{1}{2}\left|\vec{P_1'P_2'} \times \vec{P_1'P_3'}\right|$

$$\vec{P_1'P_2'} \times \vec{P_1'P_3'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 45 \\ -30 \end{pmatrix}$$

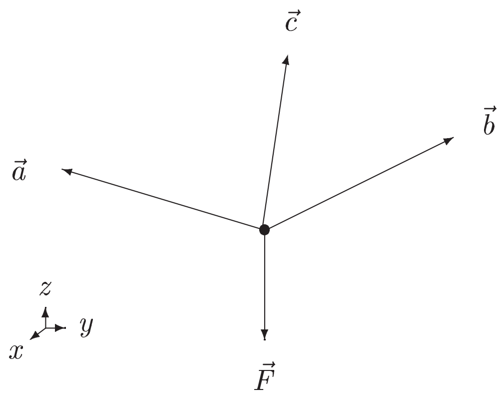
$$\left|\vec{P_1'P_2'} \times \vec{P_1'P_3'}\right| = \sqrt{30^2+45^2+(-30)^2} = 15\sqrt{17}$$

Flächeninhalt $= 30.92\ \ FE$

5. An einem Knotenpunkt von drei Seilen wirkt eine Kraft von 10 kN in Richtung $-\vec{e}_3$. Die Richtungen der Seile sind durch folgende Vektoren gegeben:

$\vec{a} = (-15, 0, 1), \qquad \vec{b} = (0, -10, 1), \qquad \vec{c} = (5, 10, 2).$

Welchen Belastungen sind die einzelnen Seile ausgesetzt?



Kräftegleichgewicht: $\vec{F} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10kN \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung des linearen Gleichungssystems: $\lambda = -1\ kN,\ \mu = \nu = -3\ kN$

Komponente von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{a}$:	$\vec{F}_a = \lambda\vec{a}$	$\Rightarrow$	Seil a muss $\lvert\vec{F}_a\rvert = 15.03\ kN$ aushalten
Komponente von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{b}$:	$\vec{F}_b = \mu\vec{b}$	$\Rightarrow$	Seil b muss $\lvert\vec{F}_b\rvert = 30.15\ kN$ aushalten
Komponente von $\vec{F}$ in Richtung von $\vec{c}$:	$\vec{F}_c = \nu\vec{c}$	$\Rightarrow$	Seil c muss $\lvert\vec{F}_c\rvert = 34.07\ kN$ aushalten