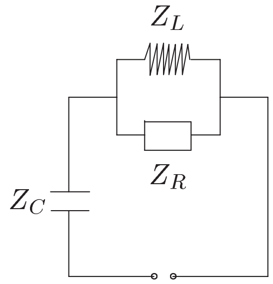
Übungsserie: Prüfungsvorbereitung

Komplexe Zahlen:

1. Berechnen Sie z im komplexen Zahlenbereich:
   $z^4 = \frac{1-i}{1+i}$ $\quad z^3 = (3i-4)^4$ $\quad (z-i)^3 = \frac{-i}{2i-1}$ $\quad z = \sqrt{\frac{3i+1}{i-1}}$

2. Berechnen Sie den komplexen Ersatzwiderstand Z der Schaltung (siehe Abbildung) Man beachte dabei, daß sich bei Reihenschaltung die Widerstände ($Z_{ges} = \sum\limits_k Z_k$) und bei Parallelschaltung die Reziproken der Widerstände ($\frac{1}{Z_{ges}} = \sum\limits_k \frac{1}{z_k}$) addieren.
   $Z_R = R, Z_C = \frac{1}{i\omega C}, Z_L = i\omega L$



Vektorrechnung:

1. Bestimmen Sie das Schnittgebilde der beiden Ebenen E_1 und E_2 ! Dabei sei E_1 die Ebene, die den Punkt P_1 enthält und senkrecht zum Vektor $\vec{a}$ ist. E_2 enthalte die drei Punkte P_2, P_3, P_4.
   $P_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad P_3 \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

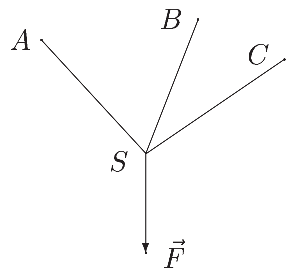
2. Wie muß man a wählen, damit die beiden Geraden g_1 durch P_1, P_2 und g_2 durch P_3, P_4 sich nicht schneiden? Sind sie dann parallel oder windschief?
   $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Bestimmen Sie das Schnittgebilde der Geraden g mit der Ebene E, wobei g die Punkte A, B enthalten soll und die Ebene E von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannt wird und den Punkt C enthält.
   $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

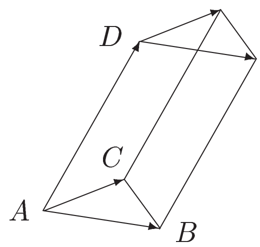
4. Gesucht ist das Schnittgebilde der drei Ebenen in Abhängigkeit von dem Parameter a.
   $$\begin{array}{lrrrr} E_1: & x- & y+ & 2z = & 0 \\ E_2: & 2x+ & ay+ & 5z = & 2 \\ E_3: & -x+ & 2y+ & az = & -2 \end{array}$$

5. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt von $P\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ an der Ebene $E: \quad x - 3y + 2z = 1$. Welchen Abstand hat P von E?

6. Welche Belastungen müssen die Seile der Anordnung (siehe Abbildung) aushalten, wenn sie im Punkt S durch eine Kraft von $25N$ belastet wird?
$A\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\-3\\5\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix}$, $S\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$



7. Gegeben sei das Prisma (siehe Abbildung) durch die Punkte A, B, C, D. Bestimmen Sie dessen Volumen!
$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$

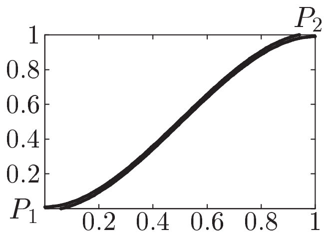


Differentialrechnung:

1. Bestimmen Sie die Parameter a, b, c, d der Funktion:
$y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + d}$,
so daß die Funktion an der Stelle $x = 1$ eine Polstelle hat. Außerdem soll sie sich für große Argumente x wie die Winkelhalbierende ($y = x$) verhalten und $f(x)$ an der Stelle $x = 3$ ein Minimum aufweisen.
Gibt es Wendepunkte?

2. Führen Sie für folgende Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch:
   (a) $y = f(x) = (x^2 + \frac{1}{4})e^{2x}$
   (b) $y = f(x) = \dfrac{ax^2}{ax + b}$
   (c) $y = f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. Ein Verbindungsstück zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 soll durch eine kubische Funktion beschrieben werden. Bestimmen Sie diese Funktion unter der Annahme, daß an den Punkten P_1 und P_2 gerade die Extremwerte angenommen werden.
   Fordert man zusätzlich, daß die Funktion (Polynom) an den Verbindungsstücken (z.B. Rohre) waagerecht anschließt, wie muß man dann den Polynomgrad wählen?



4. Berechnen Sie x näherungsweise aus folgender Gleichung mit einer Genauigkeit von 10^{-4} (für $x > 0$).
   $\frac{e^x}{\sqrt{x+2}} = 1$
   Beschaffen Sie sich eine geeignete Startlösung aus einer Skizze.

5. Nähern Sie folgende Funktion $f(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ durch eine Parabel an.
   $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$
   Vergleichen Sie exakten Funktionswert mit dem Näherungswert im relativen Extremum der Funktion.

Integralrechnung:

1. $\int\limits_0^1 (x^2 + \frac{1}{4})e^{2x}\, dx$

2. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{3x^2 + 11x + 13}{(x-1)(x+2)^2}$

3. $\int e^{1+\sin x} \cos x\, dx$

4. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1}\, dx$ (Sustitution: $x = \ln t$)

5. Das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Kurve $xy = 1$ um die x-Achse im Bereich von $x_0 = 1$ bis x_1 entsteht, soll $\frac{1}{2}\pi$ betragen. Wie muß dabei x_1 gewählt werden? (Skizze!)

6. $\int\limits_1^e (uv^2 - w \ln v + \frac{2}{u})\, dv$