Lösungen zur Übungsserie: Grenzwerte von Funktionen

1. Grenzwerte folgender Funktionen:

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{27-x^3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(-x^2-3x-9)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(-x^2-3x-9) = -27$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} 0 \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$

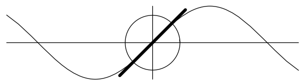
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$ (siehe 1.(d))

   (d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} =?$

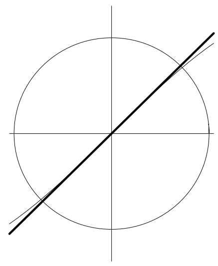
   Regel von L'Hospital:

   > Führt der Grenzwert eines Quotienten auf einen unbestimmten Ausdruck:
   > $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$
   > dann bleibt der Grenzwert erhalten, wenn man Zähler- und Nennerfunktion ableitet.
   > $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

   D.h., der Sinus verhält sich um die 0 wie die Funktion $y = x$.

   $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = \frac{-0}{-1} = 0$

2. Links- und rechtsseitigen Grenzwerte ($\lim\limits_{x\to x_0-0} y$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} y$):
   Wenn im Folgenden $+0$ oder -0 eingesetzt wird, sollen damit winzig kleine positive oder negative Zahlen gemeint sein und mit $+\infty$ oder $-\infty$ riesen große positive oder negative Zahlen.

   (a) $\boxed{f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \text{ an } x = 1}$

   $\lim\limits_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{1-x^2}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = +0$ (Annäherung an 0 von oben)

   $\lim\limits_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{1-x^2}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{\infty} = +\infty$

   (b) $\boxed{f(x) = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} \text{ an } x = 1}$

   $\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{+0}}} = \frac{1}{1+3^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = +0$ (von oben)

   $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1+3^{\frac{1}{-0}}} = \frac{1}{1+3^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$ (Annäherung von unten)

   (c) $\boxed{f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \cdot x \text{ an } x = -1}$

$$\frac{x+1}{|x+1|}\cdot x = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1}\cdot x & \text{für } x > -1 \\ \frac{x+1}{-(x+1)}\cdot x & \text{für } x < -1 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = -1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{für } x > -1 \\ -x & \text{für } x < -1 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{x+1}{|x+1|}\cdot x = \lim_{x\to -1+0} x = -1$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x+1}{|x+1|}\cdot x = \lim_{x\to -1-0} (-x) = 1$$

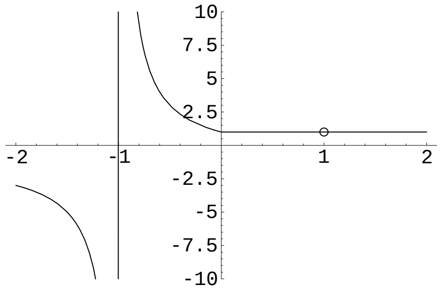
3. Unstetigkeitsstellen:

(a) $\boxed{y = \frac{1-x}{1-|x|}}$

$$\frac{1-x}{1-|x|} = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1-x}{1-(-x)} & \text{für } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1-x}{1+x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{1-x}{1-|x|} = \lim_{x\to -1+0} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{1-x}{1-|x|} = \lim_{x\to -1-0} \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{-0} = -\infty$$



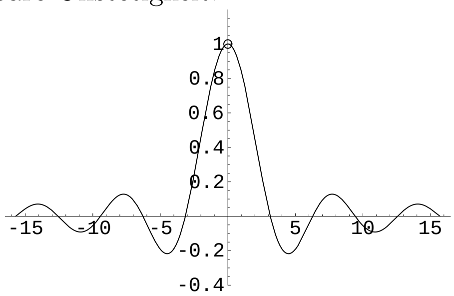
d.h., Polstelle an $x = -1$ und Lücke an $x = 1$, weil dort der linksseitige und rechtseitige Grenzwert übereinstimmt ($= 1$). Während die Polstelle eine nicht hebbare Unstetigkeit ist, kann man durch Hinzunahme des Punktes (1,1) die Lücke beheben.

(b) $\boxed{y = \frac{\sin x}{x}}$

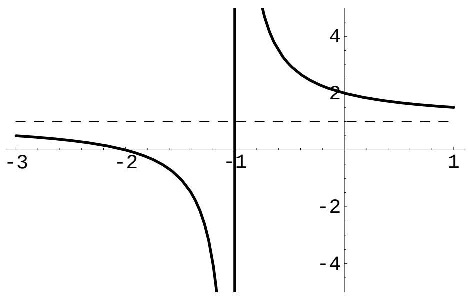
Der Grenzwert an der nicht definierten Stelle $x = 0$ existiert und ist 1 (siehe 1.(d)). Damit hat diese Funktion an $x = 0$ eine Lücke, d.h. eine hebbare Unstetigkeit.

Die Funktion $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

ist überall stetig.



(c) $\boxed{y = \frac{x+2}{x+1}} = 1 + \frac{1}{1+x}$ (Polynomdivision)

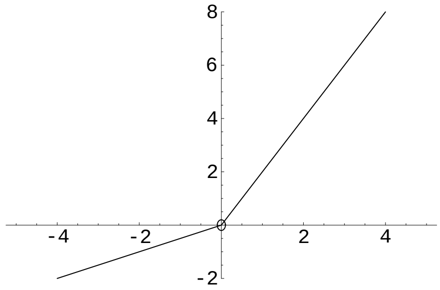


$$\lim_{x\to -1+0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1-0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Die Funktion hat an $x = -1$ eine Polstelle.
Ihr Bild erhält man, indem man die elementare Grundfunktion $y = \frac{1}{x}$ um eine Einheit nach links und eine Einheit nach oben schiebt. (siehe rationales Skizzieren von Funktionen - Übungsserie Elementare Funktionen Aufgabe 7.)

(d) $\boxed{y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}}$



$$x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}} = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } x < 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +0} x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}} = \lim_{x \to +0} 2x = 0$$

$$\lim_{x \to -0} x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}} = \lim_{x \to -0} \frac{1}{2}x = 0$$

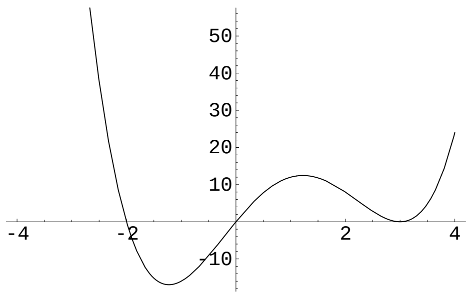
Die Funktion hat an $x = 0$ eine Lücke.

Lösungen zur Übungsserie: Rationale Funktionen

1. Der qualitative Verlauf einer ganzrationalen Funktion lässt sich aus der Art und Lage der Nullstellen und dem Vorzeichen vor der höchsten Potenz ermitteln:

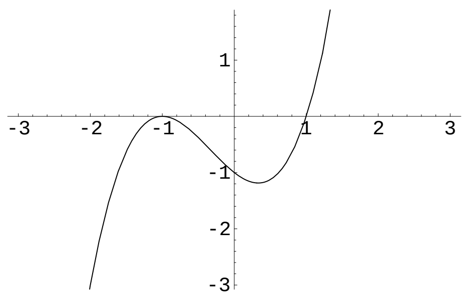
(a) $\boxed{y = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 18x} = (x-3)^2(x+2)x = x^6 + \cdots$

Nullstellen: $x_{1,2} = 3$ (doppelte Nullstelle), $x_3 = -2,\ x_4 = 0$ (einfache Nullstellen)



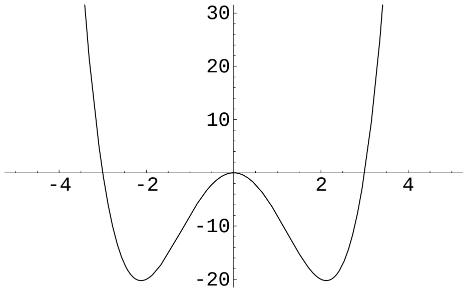
(b) $\boxed{y = (x^2 - 1)(x + 1)} = (x-1)(x+1)^2 = x^3 + \cdots$

$x_1 = 1$ (einfache Nullstelle), $x_{2,3} = -1$ (doppelte Nullstellen)



(c) $\boxed{y = x^4 - 9x^2} = x^2(x-3)(x+3) = x^4 + \cdots$

$x_{1,2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $x_3 = 3,\ x_4 = -3$ (einfache Nullstellen)

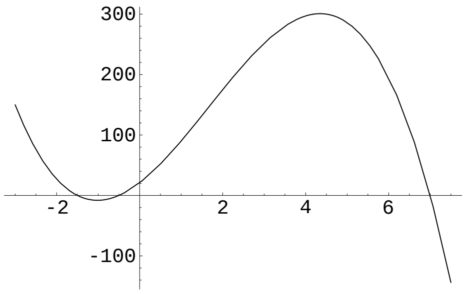


(d) $\boxed{y = -4x^3 + 20x^2 + 53x + 21}$

Suche nach Nullstellen:
$y(0) = 21,\ y(1) = 90,\ y(-1) = -8 \quad \Rightarrow$ zwischen -1 und 0 muss mindestens eine Nullstelle liegen, weil die Funktion überall stetig ist und dort ihr Vorzeichen wechselt. Wähle die Intervallmitte: $y(-\frac{1}{2}) = 0$. Damit ist dies eine Nullstelle. Das Polynom ist durch den Term ($x-$Nullstelle) teilbar. Durch Polynomdivision kann man nun einen quadratischen Term abspalten, dessen Nullstellen sich nach der bekannten Lösungsformel berechnen lassen.
$(-4x^3 + 20x^2 + 53x + 21) : (x + \frac{1}{2}) = -4x^2 + 22x + 42 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 7,\ x_3 = -\frac{3}{2}$

$y = -4x^3 + 20x^2 + 53x + 21 = -4(x-7)(x + \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})$

Der Koeffizient vor der höchsten Potenz (-4) ist negativ. Damit verläuft diese kubische Funktion entgegengesetzt zu der aus Beispiel (b).



2. Grobstruktur gebrochen rationaler Funktionen

(a) $\boxed{y = \frac{x+1}{(x+3)(x-2)}}$

Nullstellen: $x = -1$

Polstellen: $x = -3,\ x = 2$

Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereiches:
$\lim\limits_{x \to -3+0} \frac{x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{-2}{(+0)(-5)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3-0} \frac{x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{-2}{(-0)(-5)} = -\infty$

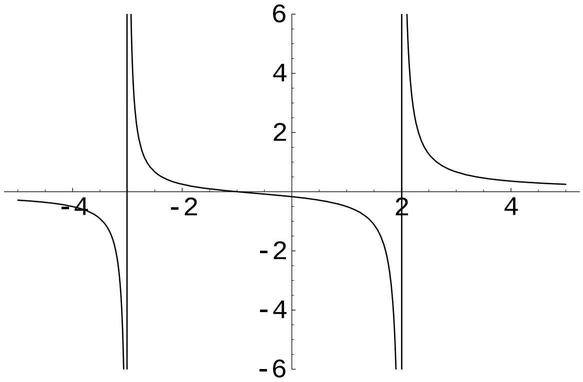
$\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{3}{(5)(+0)} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{x+1}{(x+3)(x-2)} = \frac{3}{(5)(-0)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} = 0$ (von oben)

$\lim\limits_{x \to -\infty} = 0$ (von unten)

Asymptote: Für $x \to \pm\infty$ nähert sich die Funktion an $y = 0$ an.



(b) $\boxed{y = \frac{x^2-1}{2x}}$

Nullstellen: $x_1 = 1, \; x_1 = -1$

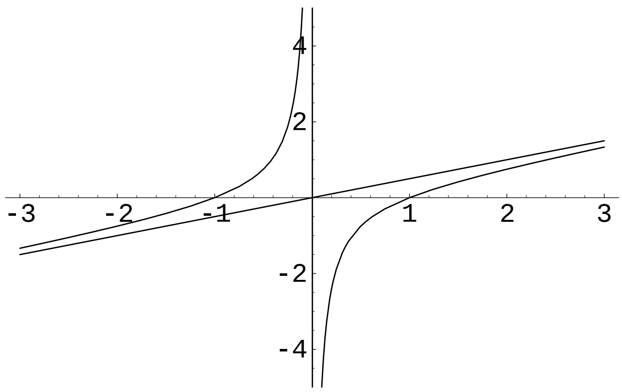
Polstellen: $x_p = 0$

$\lim\limits_{x \to +0} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{-1}{+0} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -0} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{-1}{-0} = +\infty$

Asymptotisches Verhalten:
$\frac{x^2-1}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$ =Asymptote + Rest

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{2x}$: Rest $\to +0$, d.h. y nähert sich von oben der Asymptote an.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{2x}$: Rest $\to -0$, d.h. y nähert sich von unten der Asymptote an.



(c) $\boxed{y = \frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-2)}}$

Nullstellen: $x_1 = -2, \; x_2 = 1, \; x_3 = 3$

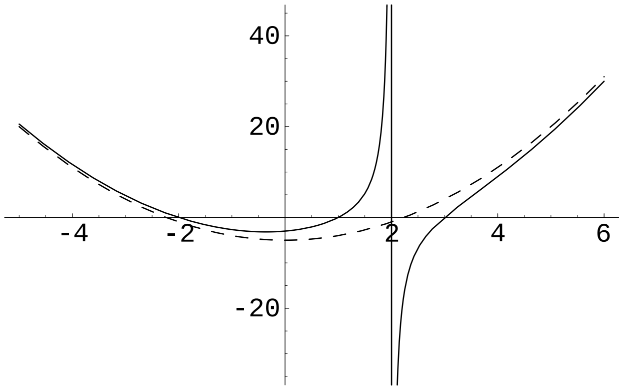
Polstellen: $x_p = 2$

$\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-2)} = \frac{-12}{+0} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-2)} = \frac{-12}{-0} = +\infty$

$y = \frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-2)} = \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2} = x^2 - 5 - \frac{4}{x-2}$ = Asymptote + Rest

$\lim\limits_{x\to\infty}$ Rest $= -0 \quad \Rightarrow \quad$ Annäherung von unten an $y_A = x^2 - 5$

$\lim\limits_{x\to-\infty}$ Rest $= +0 \quad \Rightarrow \quad$ Annäherung von oben an $y_A = x^2 - 5$



(d) $\boxed{y = \frac{x^3-3x-2}{x^2-3x-4}}$

$y = \frac{x^3-3x-2}{x^2-3x-4} = \frac{(x-2)(x+1)^2}{(x-4)(x+1)} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-4} = x + 3 + \frac{10}{x-4}$ für $x \neq -1$

Nullstellen: $x_0 = 2$

Lücken: $x_L = -1, \quad \lim\limits_{x\to-1} = 0$

Polstellen: $x_p = 4$

$\lim\limits_{x\to4+0} \frac{x^3-3x-2}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x\to4+0} \frac{(x-2)(x+1)}{x-4} = \frac{10}{+0} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to4-0} \frac{x^3-3x-2}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x\to4-0} \frac{(x-2)(x+1)}{x-4} = \frac{10}{-0} = -\infty$

Asymptote: $y_A = x + 3$, der Rest: $\frac{10}{x-4}$ ist für $x \to +\infty$ positiv $(+0)$, so dass sich die Funktion von oben an die Asymptote annähert. Er ist für $x \to -\infty$ negativ (-0), so dass sich die Funktion von unten an die Asymptote annähert.