Übungsserie: Vektorrechnung 1

1. Veranschaulichen Sie mittels grafischer Darstellung von Vektoren (als Verschiebungen der Punkte des Raumes) durch Pfeile folgende Gesetze:
   $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
   $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

2. Bestimmen Sie grafisch und trigonometrisch Richtung und Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}$ mit $|F_1|=F_1=700N \quad F_2=600N$ und $\angle(\vec{F_1},\vec{F_2})=110^o$

3. Ein Mann schwimmt mit der konstanten Geschwindigkeit von $1\frac{m}{s}$. Er will einen 10m breiten Fluß senkrecht zur Flußrichtung überqueren, der eine Strömungsgeschwindigkeit von $0,8\frac{m}{s}$ hat. Bestimmen Sie Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit! Wie weit wird er abgetrieben?

4. Geben Sie sich drei nicht parallele Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ in der Ebene vor.
   Veranschaulichen Sie sich durch Konstruktion $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

5. Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung:
   In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.

6. A,B,C seien drei Punkte des Raumes. Sie sollen nicht auf einer Geraden liegen. Man betrachte diese Punkte als Eckpunkte eines Dreiecks und bestimme die Vektoren, die parallel zu folgenden sind:

   (a) Seitenhalbierende von $\vec{AB}$
   (b) Winkelhalbierende des Winkels an A
   (c) Höhe auf $\vec{BC}$
   (d) Mittelsenkrechte von $\vec{CA}$

7. Beweisen Sie $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

8. Welche der folgenden Aussagen sind definiert? Stellen die definierten Ausdrücke einen Vektor oder ein Skalar dar?

   a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$ b) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times(\vec{c}\cdot\vec{d})$
   c) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ d) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\cdot\vec{d})$
   e) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ f) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$
   g) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

Übungsserie: Vektorrechnung 2

1. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein ?

   (a) $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -1)$

   (b) $\vec{a} = (5, 3, 4)$, $\vec{b} = (1, 7, 0)$

2. Welche Vektoren $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$ erfüllen die Bedingungen
   $|\vec{a}| = 20, arc(\vec{e}_1, \vec{a}) = arc(\vec{e}_2, \vec{a}) = \pi/3$?

3. Zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sind durch ihre Beträge $|\vec{a}| = 15, |\vec{b}| = 10$ und je zwei Richtungskosinus $\cos(\vec{e}_1, \vec{a}) = 0.6$ und $\cos(\vec{e}_2, \vec{a}) = 0.8$ bzw. $\cos(\vec{e}_1, \vec{b}) = 0.4$ und $\cos(\vec{e}_2, \vec{b}) = 0.6$ gegeben. Man berechne

   (a) Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

   (b) die Richtungswinkel

   (c) Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

   (d) Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

   (e) Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

4. Man bestimme zwei Zahlen α und β so, daß der Vektor
   $\vec{a} = \vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$ auf den Vektoren
   $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ und $\vec{c} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
   senkrecht steht.

5. Gegeben sind drei Punkte im Raum:
   $A(1, 1, 1)$, $B(0, 2, 1)$ und $C(-2, 3, -1)$

   (a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$!

   (b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Übungsserie: Vektorrechnung 3

1. (a) Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\begin{array}{rcrcrcr} \vec{v}_1 & = & 4\vec{e}_1 & + & 4\vec{e}_2 & - & 2\vec{e}_3 \\ \vec{v}_2 & = & 4\vec{e}_1 & - & 2\vec{e}_2 & + & 4\vec{e}_3 \\ \vec{v}_3 & = & -2\vec{e}_1 & + & 4\vec{e}_2 & + & 4\vec{e}_3 \end{array}$$

linear unabhängig sind!

(b) Stellen Sie den Vektor $\vec{a} = 8\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3$ als Linearkombination der $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ dar!

2. Sind die Vektoren

$\vec{a} = (2, -1, -3) \qquad \vec{b} = (-2, 1, 1) \qquad \vec{c} = (-2, 1, -3)$

linear unabhängig?
Falls nicht, bestimmen Sie drei Zahlen λ, μ, ν mit $\vec{o} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

3. Man bestimme λ so, daß die drei Vektoren

$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \qquad \vec{b} = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \qquad \vec{c} = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$

komplanar sind.

4. Lassen sich alle Vektoren des Raumes als Linearkombination des folgenden Vektortripels $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ darstellen?

(a) $\vec{x} = (1, 1, 2) \qquad \vec{y} = (2, 0, 2) \qquad \vec{z} = (1, 2, 4)$
(b) $\vec{x} = (1, 1, 2) \qquad \vec{y} = (2, 0, 2) \qquad \vec{z} = (3, 2, 5)$

Können die Vektoren $\vec{a} = (0, 2, 2)$ und $\vec{b} = (2, 2, 1)$ als Linearkombination von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ dargestellt werden?