Lösungen zur Übungsserie: Differentialrechnung

1. Differenzieren Sie folgende Funktionen:

   (a) $y = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3})$
   Ausmultipliziren und als Potenzen schreiben:
   $y = (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{3}{2}}) = x^{\frac{13}{6}} - x^{\frac{11}{6}}$
   $y' = \frac{13}{6} x^{\frac{7}{6}} - \frac{11}{6} x^{\frac{5}{6}}$

   (b) $y = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$
   Polynomdivision:
   $$y = \frac{(x^3-1)}{(x^2+x+1)} = x - 1$$
   $y' = 1$

   (c) $y = \sqrt{x}\ \sin x$
   Produktregel:
   $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x$

   (d) $y = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$
   Kettenregel: oder Produktregel:
   $y' = 2 \cos 2x \quad = \quad 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$

   (e) $y = \frac{x}{\mathrm{e}^x} = x\mathrm{e}^{-x}$
   Produktregel:
   $y' = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$

   (f) $y = 5^x + 2^x$
   $y' = 5^x \ln 5 + 2^x \ln 2$

   (g) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
   Kettenregel:
   $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{2}{(x-1)^2}$

   (h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$
   Kettenregel:
   $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \cdot \frac{2}{(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

   (i) $y = \arctan \sqrt{\frac{x}{x+a}}$
   Kettenregel:
   $y' = \left(1 + \frac{x}{x+a}\right) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+a}{x}} \cdot \frac{a}{(a+x)^2}$

   (j) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$
   Logarithmengesetze:
   $y = \frac{2}{3} \ln (x+2) + \frac{4}{5} \ln x - \frac{5}{4} \ln (x^2 - 4)$
   Summenregel:
   $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{x+2} + \frac{4}{5} \frac{1}{x} - \frac{5}{4} \frac{1}{x^2-4} \cdot 2x$

2. Logarithmisches Differenzieren:

$$\begin{array}{rcll} y(x) &=& x^x & |\ln\ldots \\ \ln y(x) &=& x\ln x & |\frac{d\ldots}{dx} \\ \text{Kettenregel} && \text{Produktregel} & \\ \frac{1}{y(x)}\cdot y'(x) &=& \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x\ +1 & |\cdot y(x) = x^x \\ y'(x) &=& x^x(1+\ln x) & \end{array}$$

(a) $y = (x^x)^x$

$$\begin{array}{rcll} \ln y(x) &=& x\ln x^x = x^2\ln x & |\frac{d\ldots}{dx} \\ \text{Kettenregel} && \text{Produktregel} & \\ \frac{1}{y(x)}\cdot y'(x) &=& 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} & \\ &=& x(2\ln x+1) & |\cdot y(x) = (x^x)^x \\ y'(x) &=& (x^x)^x x\,(2\ln x+1) & \end{array}$$

(b) $y = x^{(x^x)}$

$$\begin{array}{rcll} \ln y(x) &=& x^x\ln x & |\frac{d\ldots}{dx} \\ \text{Kettenregel} && \text{Produktregel} & \\ \frac{1}{y(x)}\cdot y'(x) &=& x^x(1+\ln x)\ln x + x^x\frac{1}{x} & |\cdot y(x) = (x^x)^x \\ y'(x) &=& x(x^x)\ x^x\ \left(\ln x + (\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right) & \end{array}$$

(c) $y = \tan x^{\frac{1}{\cos x}}$

$y' = \left(1+\tan^2 x^{\frac{1}{\cos x}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{\cos x}}\right)'$

$u(x) = x^{\frac{1}{\cos x}}$

$$\begin{array}{rcll} \ln u(x) &=& \frac{1}{\cos x}\ln x & |\frac{d\ldots}{dx} \\ \text{Kettenregel} && \text{Produktregel} & \\ \frac{1}{u(x)}\cdot u'(x) &=& \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ln x + \frac{1}{\cos x}\frac{1}{x} & |\cdot u(x) \\ u'(x) &=& x^{\frac{1}{\cos x}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\ln x + \frac{1}{\cos x}\frac{1}{x}\right) & \end{array}$$

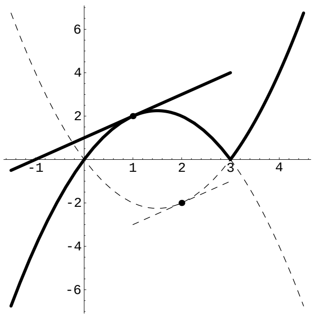
$$y' = \left(1+\tan^2 x^{\frac{1}{\cos x}}\right)\cdot x^{\frac{1}{\cos x}}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\ln x + \frac{1}{\cos x}\frac{1}{x}\right)$$

3. In welchem Kurvenpunkt schneidet die Tangente an die Kurve $y = x|3-x|$ die x-Achse unter einem Winkel von 45°?

$$y = x|3-x| = \begin{cases} x(3-x) & \text{für } x\le 3 \\ x(x-3) & \text{für } x>3 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3-2x & \text{für } x\le 3 \\ 2x-3 & \text{für } x>3 \end{cases} = \tan 45° = 1$$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2$ entfällt, weil nicht > 3.



4. Wie verhält sich die Kurve $y = f(x)$ gegeben durch $xe^y - y + 1 = 0$ in der Umgebung des Punktes $(-1, 0)$.

   Differentation implizit gegebener Funktionen

$$\begin{array}{lcll} xe^{y(x)} - y(x) + 1 & = & 0 & \text{bilde } \frac{d\ldots}{dx} \\ e^{y(x)} + xe^{y(x)}y'(x) - y'(x) & = & 0 & \text{auflösen nach } y'(x) \\ y'(x) & = & -\dfrac{e^{y(x)}}{xe^{y(x)} - 1} & \end{array}$$

   Einsetzen des Punktes $P_0(-1, 0)$

$$y'(P_0) = \tfrac{1}{2}$$

   Die Funktion verhält sich in der Umgebung von $P_0(x_0 = -1, y_0 = 0)$ wie ihre Tangente:

$$y = y_0 + y'(P_0)(x - x_0)$$

$$y = \tfrac{1}{2}(x + 1)$$

5. Durch welche Geraden lassen sich folgende Funktionen um x_0 annähern?

   (a) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}, \quad x_0 = \frac{\pi^2}{2}$

   $y' = \cos\sqrt{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \frac{1}{2}$ (Kettenregel) $\Rightarrow \quad y'(\frac{\pi^2}{2}) = 0$

   Die Funktion lässt sich um x_0 durch die kostante Funktion $y = y(x_0) = 1$ annähern.

   (b) $y = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1$

   $y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ (Quotientenregel) $\Rightarrow \quad y'(1) = 1$

   Die Funktion lässt sich um $x_0 = 1$ durch die Gerade $y = x - 1$ (Tangente) annähern.

   (c) $y = x \cdot e^{\cos x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

   $y' = e^{\cos x} + xe^{\cos x}(-\sin x) = e^{\cos x}(1 - x\sin x) \quad \Rightarrow \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$

   Die Funktion lässt sich um x_0 durch die Gerade $y = \frac{\pi}{2} + \left(1 - \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (Tangente) annähern.