Prof. Dr.-Ing. C. Proppe
Prof. Dr.-Ing. W. Seemann
Prof. Dr.-Ing. J. Wauer

Name: Vorname: Matr. Nr.:	Testat:	Termin: (jew. 19:00 Uhr) **Mo., 14.11.2005**

Technische Mechanik III/1

Übungsblatt Nr. 1

Thema: **Kinematik des Punktes**

Formelsammlung:

Auswertung von Lage $\underset{\sim}{r}(t)$,

Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}(t) = \dot{\underset{\sim}{r}}(t)$ und

Beschleunigung $\underset{\sim}{a}(t) = \dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \ddot{\underset{\sim}{r}}(t)$

in verschiedenen Koordinatensystemen:

a) kartesische Koordinaten (ortsfest): Einheitsvektoren $\underset{\sim}{e}_x, \underset{\sim}{e}_y, \underset{\sim}{e}_z$

$$\underset{\sim}{r}(t) = x\underset{\sim}{e}_x + y\underset{\sim}{e}_y + z\underset{\sim}{e}_z = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underset{\sim}{r}}(t) = \underset{\sim}{v}(t) = \dot{x}\underset{\sim}{e}_x + \dot{y}\underset{\sim}{e}_y + \dot{z}\underset{\sim}{e}_z = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}(t) = \dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \underset{\sim}{a}(t) = \ddot{x}\underset{\sim}{e}_x + \ddot{y}\underset{\sim}{e}_y + \ddot{z}\underset{\sim}{e}_z = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

b) Zylinderkoordinaten (mitdrehend): Einheitsvektoren $\underset{\sim}{e}_r, \underset{\sim}{e}_\varphi, \underset{\sim}{e}_z$

$$\underset{\sim}{r}(t) = r\underset{\sim}{e}_r + z\underset{\sim}{e}_z$$

$$\dot{\underset{\sim}{r}}(t) = \underset{\sim}{v}(t) = \dot{r}\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\varphi}\underset{\sim}{e}_\varphi + \dot{z}\underset{\sim}{e}_z$$

$$\ddot{\underset{\sim}{r}}(t) = \dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \underset{\sim}{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_\varphi + \ddot{z}\underset{\sim}{e}_z$$

Spezialfall von b): Polarkoordinaten ($z \equiv 0$)

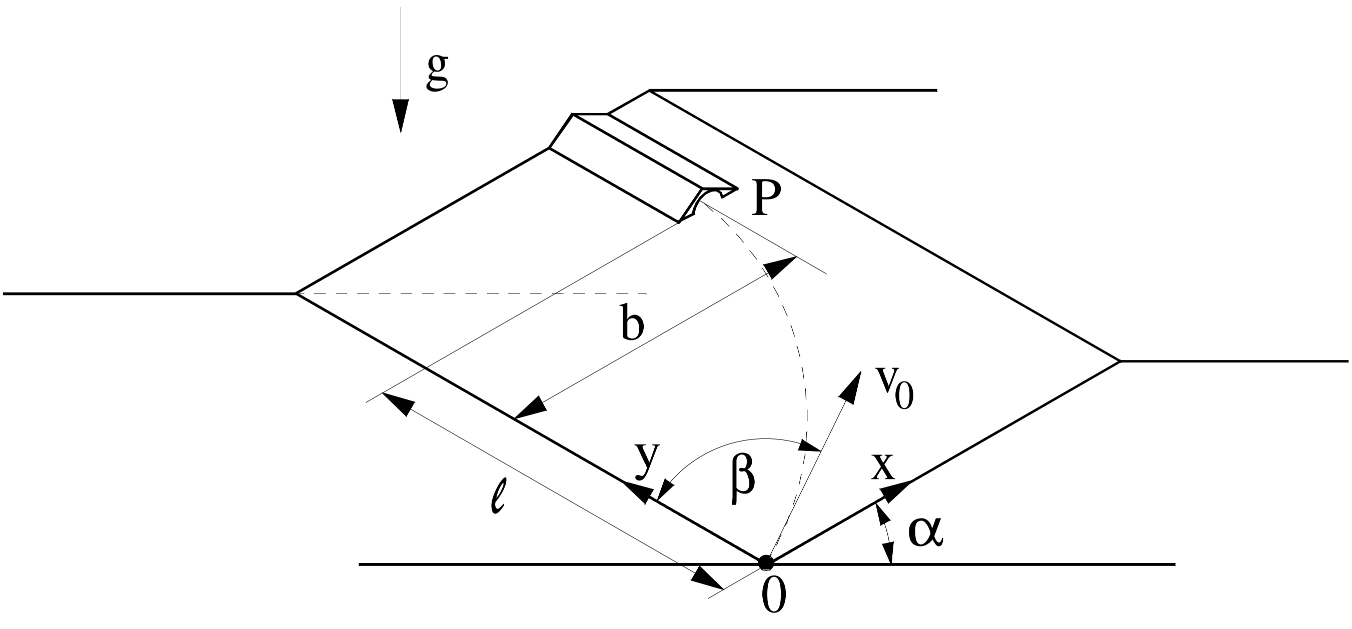
c) Natürliche Koordinaten (mitbewegt): Einheitsvektoren $\underset{\sim}{e}_t, \underset{\sim}{e}_n$

$s(t)$ = skalare Bogenlänge zur Ortsbestimmung

$$\underset{\sim}{v}(t) = \dot{s}\underset{\sim}{e}_t$$

$$\underset{\sim}{a}(t) = \ddot{s}\underset{\sim}{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\varrho}\underset{\sim}{e}_n = \dot{v}\underset{\sim}{e}_t + \frac{v^2}{\varrho}\underset{\sim}{e}_n; \qquad \varrho = \text{Krümmungsradius}$$

Aufgabe 1 – 1



Ein Golfspieler möchte seinen Ball von O auf <u>direktem</u> Wege in das Loch P befördern. Die Bahn sei ideal glatt und der Spieler erteilt dem Ball in O eine konstante Bahngeschwindigkeit v_0.

1. Man bestimme den Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}(t)$ für die Bewegung $O \rightarrow P$, hervorgerufen durch die Erdbeschleunigung $\underset{\sim}{g}$, im kartesischen x, y-Koordinatensystem.

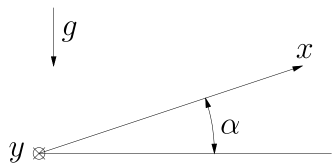
2. Man ermittle daraus den zugehörigen Geschwindigkeits- und Lagevektor $\underset{\sim}{v}(t)$ und $\underset{\sim}{r}(t)$.

3. Mit welcher Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}_0$ (Betrag und Richtung) muß der Ball O verlassen, um sein Ziel ohne anzuecken zu erreichen? Wie lange dauert es, bis der Ball im Loch P verschwindet?

4. In welchem Maß muß $\underset{\sim}{v}_0$ (nach Betrag und Richtung) geändert werden, wenn der Neigungswinkel α auf den Wert α^* verändert wird?

Lösung zur Aufgabe 1 – 1

1. Beschleunigungsvektor:



$$\rightsquigarrow \underline{\underline{\underset{\sim}{a}(t) = \begin{pmatrix} -g\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{x,y}}}$$

2. Geschwindigkeits- und Lagevektor:

Integration:

$$\underset{\sim}{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g\sin\alpha\ t + C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{r}(t) = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g\sin\alpha\ \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_3 \\ C_2 t + C_4 \end{pmatrix}$$

Anfangsbedingungen: $\underset{\sim}{v}(t=0) = \underset{\sim}{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{r}(t=0) = \underset{\sim}{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit: $C_1 = v_{0x}$, $C_2 = v_{oy}$, $C_3 = C_4 = 0$

$$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{\underset{\sim}{v}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x} - g\sin\alpha\ t \\ v_{0y} \end{pmatrix}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\underset{\sim}{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0x}t - g\sin\alpha\ \frac{t^2}{2} \\ v_{0y}t \end{pmatrix}}}$$

3. Anfangsgeschwindigkeit v_0, Zeit T:

Notwendige Bedingung in P: $v_x(P) = v_x(t=T) \overset{!}{=} 0$,

$$\text{d.h.} \quad v_{0x} - g\sin\alpha\ T = 0 \ . \tag{1}$$

Zusätzliche Bedingung aus Geometrie:

$$\underset{\sim}{r}(t=T) = \begin{pmatrix} v_{0x}T - g\sin\alpha\ \frac{T^2}{2} \\ v_{0y}T \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} b \\ \ell \end{pmatrix} \qquad (2),\ (3)$$

3 skalare Gleichungen für $v_{0x},\ v_{0y},\ T$. Aus (1): $T = \dfrac{v_{0x}}{g\sin\alpha}$ (1^*) und damit in (2), (3):

$$\underline{\underline{v_{0x} = \sqrt{2g\sin\alpha\ b}\ , \quad v_{0y} = \frac{\ell}{2b}\sqrt{2g\sin\alpha\ b}\ , \quad v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}\ , \quad \tan\beta = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}}}$$

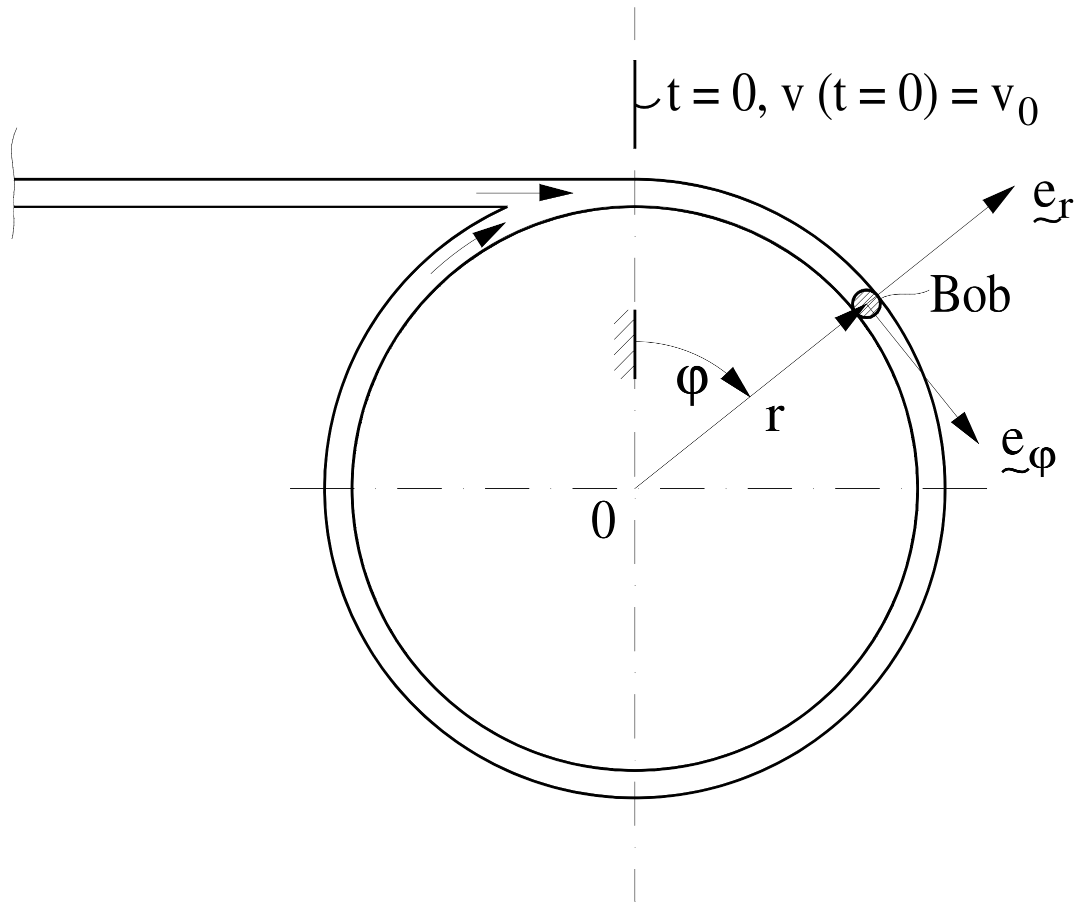
Zurück in (1^*): $\underline{\underline{T = \sqrt{\dfrac{2b}{g\sin\alpha}}}}$

4. Änderung von v_0 und β bei $\alpha \ \to \alpha^*$:

$$\underline{\underline{\frac{v_0^*}{v_0}}} = \frac{\sqrt{2g\sin\alpha^*\ b}\ \sqrt{1+\left(\frac{\ell}{2b}\right)^2}}{\sqrt{2g\sin\alpha\ b}\ \sqrt{1+\left(\frac{\ell}{2b}\right)^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{sin\alpha^*}{\sin\alpha}}}}\ , \quad \underline{\underline{\frac{\tan\beta^*}{\tan\beta}}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2g\sin\alpha^*\ b}}{\frac{\ell}{2b}\sqrt{2g\sin\alpha^*\ b}}}{\dfrac{\sqrt{2g\sin\alpha\ b}}{\frac{\ell}{2b}\sqrt{2g\sin\alpha\ b}}} = \underline{\underline{1}}$$

d.h. ungeändert.

Aufgabe 1 – 5:



Bei neueren Bobbahnen befindet sich am Ziel eine kreisförmige Schleife, der sogenannte Kreisel. Er wird von den Schlitten solange durchfahren, bis sie auf Grund der vorhandenen Reibung zum Stehen kommen. Bob Deutschland I rast mit der Geschwindigkeit v_0 in die Schleife hinein. Die Reibung bewirkt eine tangentiale konstante Verzögerung p_0.

1. Man ermittle für die Bewegung des Bobs in Polarkoordinaten

   a.) die Komponente $\underset{\sim}{a}_{\varphi}$ des Beschleunigungsvektors in $\underset{\sim}{e}_{\varphi}$ -Richtung,

   b.) durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Berechnungsformel $\underset{\sim}{a}_{\varphi} = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_{\varphi}$ und anschließender Integration die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$,

   c.) den Geschwindigkeitsvektor $\underset{\sim}{v}(t)$,

   d.) den Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}(t)$.

2. Die Komponenten des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors sind in eine Skizze einzutragen.

3. Nach welcher Zeit T kommt der Bob zum Stehen?

Lösung zur Aufgabe 1 – 5:

1.a.) Beschleunigung in $\underset{\sim}{e}_\varphi$−Richtung

$$\underline{\underline{\underset{\sim}{a}_\varphi = -p_0 \underset{\sim}{e}_\varphi}} \qquad \text{(Verzögerung)}$$

1.b.) Winkelgeschwindigkeit

$$\underset{\sim}{a}_\varphi = -p_0 \underset{\sim}{e}_\varphi = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \text{mit} \quad \dot{r} = 0 \quad (r = const)$$

$$-p_0 = r\ddot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{1}{r}p_0$$

$$\underline{\dot{\varphi} = -\frac{1}{r}p_0 t + C}$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \quad \underline{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t=0) = \frac{v(t=0)}{r} = \underline{\frac{v_0}{r} = C} \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{r}(v_0 - p_0 t)}}$$

1.c.) Geschwindigkeitsvektor

$$\underset{\sim}{v}(t) = \dot{r}\underset{\sim}{e}_r + r\dot{\varphi}\underset{\sim}{e}_\varphi \Rightarrow \quad \text{mit 1.b.)}$$

$$\underline{\underline{\underset{\sim}{v}(t) = (v_0 - p_0 t)\underset{\sim}{e}_\varphi}}$$

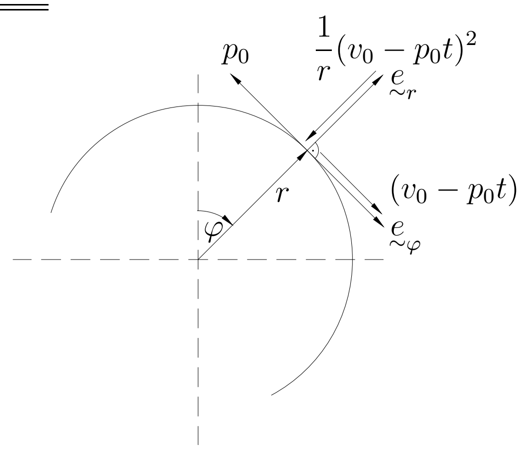
1.d.) Beschleunigungsvektor

$$\underset{\sim}{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\underset{\sim}{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underset{\sim}{e}_\varphi$$

$$\dot{r} = \ddot{r} = 0, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{r^2}(v_0 - p_0 t)^2, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{1}{r}p_0 \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\underset{\sim}{a}(t) = -\frac{1}{r}(v_0 - p_0 t)^2 \underset{\sim}{e}_r - p_0 \underset{\sim}{e}_\varphi}}$$

2.) Skizze

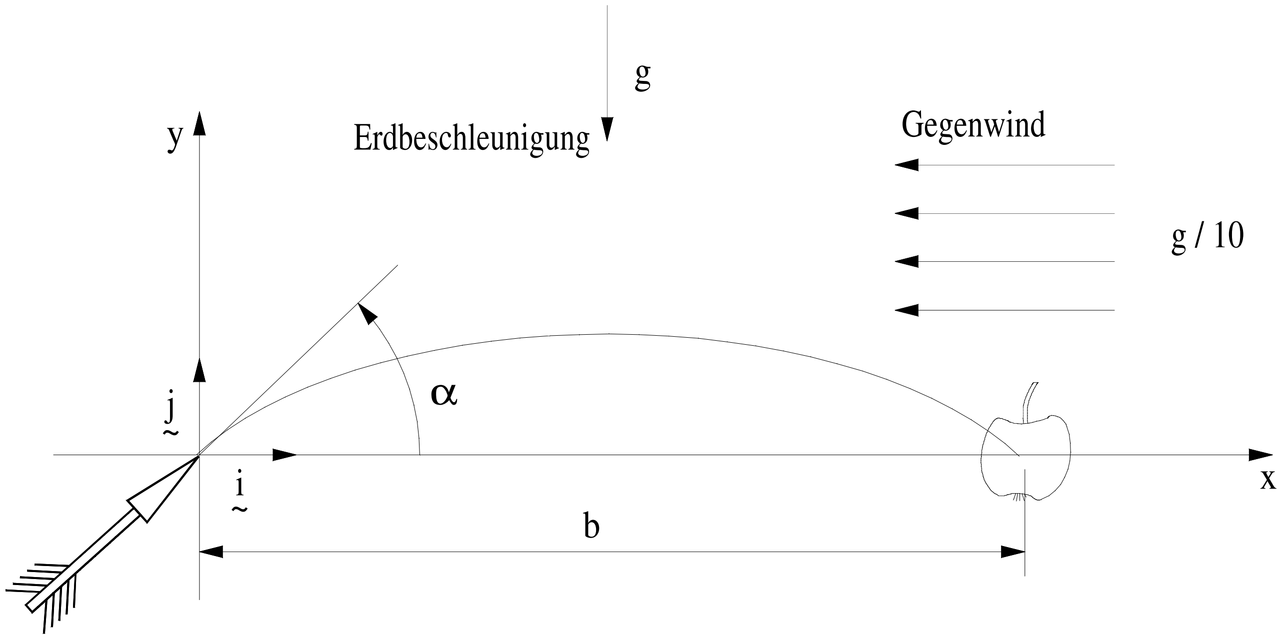


3.) Bremszeit

$$\text{aus 1.c.):}\ v_\varphi = v_0 - p_0 t \qquad \text{bei Stillstand:}\ v_\varphi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$0 = v_0 - p_0 T \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \frac{v_0}{p_0}}}$$

Aufgabe 1 – 2



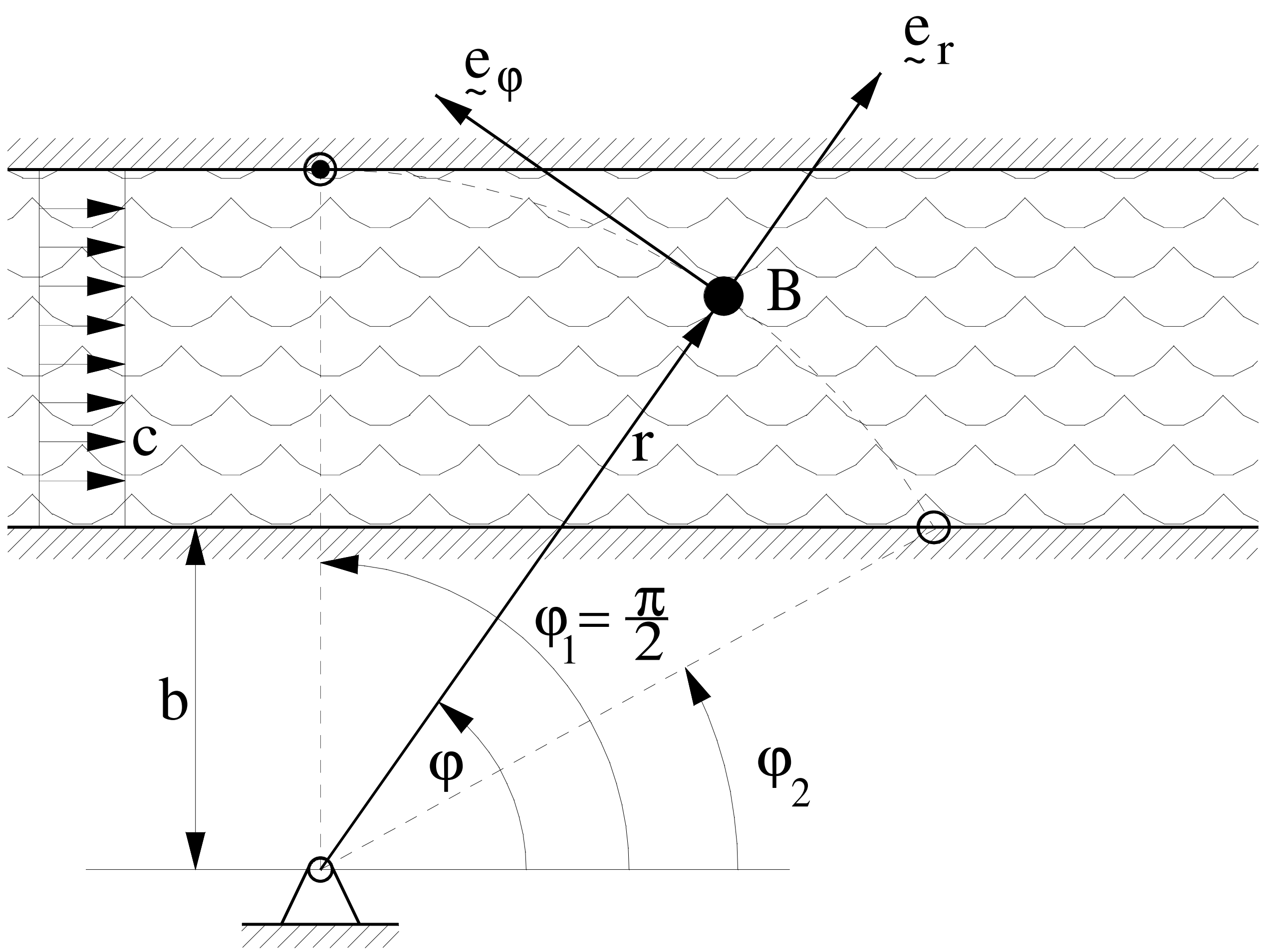
Historiker berichten, dass Wilhelm Tell den Pfeil im Koordinatenursprung ($x = y = 0$) abgeschossen habe und der Apfel auf dem Kopf seines Knaben im Punkt P mit den Koordinaten $x = b$, $y = 0$ angeordnet gewesen sei. Da das Wetter an dem Tage nicht nur schön sondern auch windig gewesen sein soll, wirkte neben der Erdbeschleunigung g in negativer $y-$Richtung durch den Gegenwind eine Beschleunigung $\frac{g}{10}$ in negativer $x-$Richtung. Als ein Mann, der in den Mechanik-Übungen immer gut aufgepaßt hatte, soll Wilhelm Tell gewußt haben, daß er dem Pfeil betragsmäßig eine Geschwindigkeit v_0 verleihen konnte.

1. Man gebe den Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}$ im kartesischen $x, y-$Koordinatensystem an.

2. Man berechne das Geschwindigkeits- und Weg-Zeitgesetz $\underset{\sim}{v}(t)$ bzw. $\underset{\sim}{r}(t)$ in diesen Koordinaten.

3. Unter welchem Winkel α wurde der Pfeil abgeschossen, wenn Wilhelm Tell den Apfel - wie ja bekannt - traf (es gelte $\dfrac{v_0^2}{b} = \dfrac{10g}{9}$).

Aufgabe 1 – 4

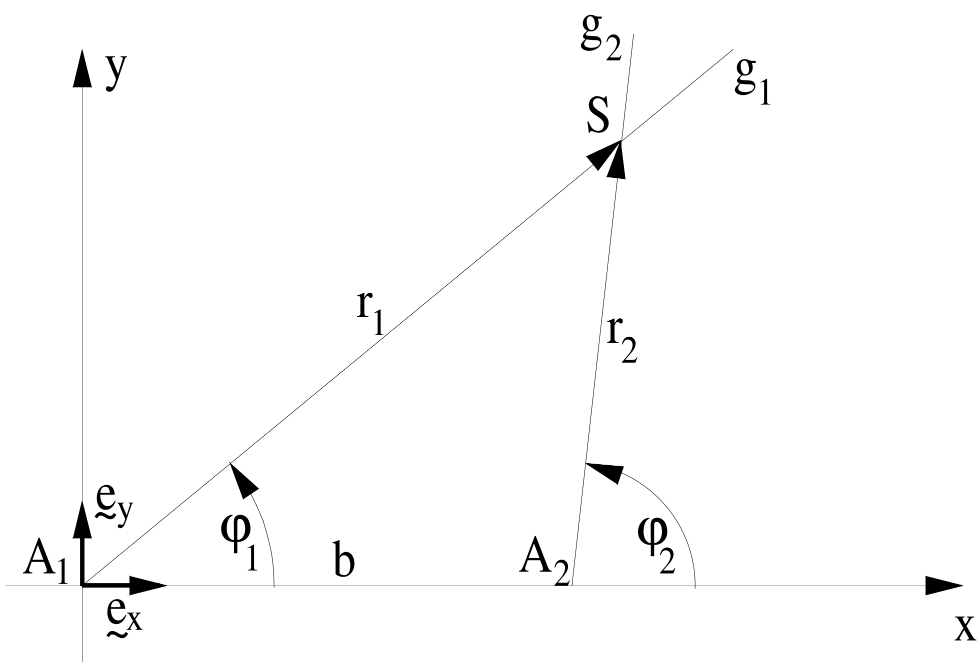


Eine Boje B hängt an einem Seil der Länge r, welches im Abstand $b = \frac{r}{2}$ vom Flußufer befestigt ist. Unter dem Einfluß der Strömung schwimmt die Boje vom linken zum rechten Ufer, wobei das Seil stets gespannt bleibt und die Bojengeschwindigkeit mit dem in die Richtung der Bahntangente fallenden Anteil der konstanten Strömungsgeschwindigkeit c übereinstimmt.

1. Man stelle nacheinander Ortsvektor $\underset{\sim}{r}$, Geschwindigkeit $\underset{\sim}{v}$ und Beschleunigung $\underset{\sim}{a}$ für eine allgemeine Lage der Boje in Polarkoordinaten auf.

2. Man berechne für $r = 45\text{m}$ und $c = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Zeit T, die die Boje zur Überquerung des Flusses benötigt.

Aufgabe 1 – 6



Die Geraden g_1, g_2 drehen sich aus der anfänglichen Ruhelage, in der sie sich mit der Geraden $\overline{A_1 A_2}$ decken, mit den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ bzw. $\dot{\varphi}_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$.

1. Man bestimme die Vektoren $\underset{\sim}{r}_1, \underset{\sim}{r}_2$ zum Schnittpunkt S im <u>kartesischen</u> ($\underset{\sim}{e}_x\ \underset{\sim}{e}_y\ \underset{\sim}{e}_z$)-System.

2. Für den Spezialfall $\dot{\varphi}_2 = 2\,\dot{\varphi}_1 = 2\,\dot{\varphi}$ ermittle man den Geschwindigkeitsvektor $\underset{\sim}{v}$ und den Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}$ des Schnittpunktes S.

3. Man skizziere die Bahn von S und trage in einer allgemeinen Lage die <u>natürlichen</u> Einheitsvektoren ($\underset{\sim}{e}_t\ \underset{\sim}{e}_n$) ein.

4. Man berechne die Beträge $v,\ a_t$ und a_n.